Leçon n°4 : Utiliser le calcul littéral pour démontrer un résultat général

Propriété

On peut utiliser une expression littérale pour écrire certaines propriétés des nombres entiers.

Exemples :

- Un nombre entier n étant choisi :
  - Le nombre entier suivant est noté ……………………… .
  - Le nombre entier précédent est noté ……………………… .
- Une suite de trois nombres entiers consécutifs peut s'écrire : ………………………………………………
- Un nombre pair s'écrit toujours sous la forme … … … avec k un nombre entier.
- Un nombre impair s'écrit toujours sous la forme … … … … ou … … … …. .
- Un multiple de 3 s'écrit … … … et un multiple de 10 s'écrit … … … avec n et p des nombres entiers.

Définition

Deux expressions littérales sont égales si elles donnent toujours le même résultat quelque soient les valeurs numériques attribuées aux lettres.

Propriétés

☯ Pour prouver que deux expressions littérales sont toujours égales, on peut les développer et les réduire : cette forme est unique.

☯ Pour prouver que deux expressions littérales ne sont pas égales, on peut se contenter d'un contre-exemple.

Exemples :

① Prouver que $(x+6)(2x-1) = x(11+x) + x^2 - 6$.

Je développe les expressions contenues dans chacun des membres.

$(x+6)(2x-1)$	$x(11+x) + x^2 - 6.$
$=$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … …	$=$ … … … … … … … … … … … … … …
$=$ … … … … … … … … … … … …	$=$ … … … … … … … … … … … …
$=$ … … … … … … … … …	$=$ … … … … … … … … …

Les deux expressions ont la même forme développée réduite, elles sont donc …………… .

② Jean affirme « Pour tous les nombres a et b, on a $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. »
A-t-il raison ?

Avec $a = 2$ et $b = 3$, on a $(a+b)^2 = (\dots\dots + \dots\dots)^2 = \dots\dots^2 = \dots\dots$

alors que $a^2 + b^2 = \dots\dots + \dots\dots = \dots\dots + \dots\dots = \dots\dots$

C'est un ………………… - ……………………………, l'affirmation de Jean est donc ………………… .

③ Voici deux programmes de calcul.

Programme A
- Choisir un nombre.
- Soustraire 1.
- Élever au carré.
- Soustraire 1.

Programme B
- Choisir un nombre.
- Soustraire 2.
- Multiplier par le nombre choisi

Démontre que ces deux programmes donnent même résultat quel que soit le nombre choisi.

On note n le nombre choisi au départ.

<u>Programme A</u>

- n • $\dots\dots \quad \dots\dots$ • $(\dots\dots \quad \dots\dots)$
- $(\dots\dots \quad \dots\dots) \; - \; \dots\dots$

Donc

$P_A = (\dots\dots\dots\dots) - \dots\dots$

$P_A = (\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots) - \dots\dots$

$P_A = \dots\dots\dots\dots - \dots\dots\dots\dots - \dots\dots\dots\dots + \dots\dots\dots\dots - \dots\dots$

$P_A = \dots\dots - \dots\dots - \dots\dots + \dots\dots - \dots\dots$

$\boxed{P_A = \dots\dots \quad \dots\dots}$

<u>Programme B</u>

- n • $\dots\dots \quad \dots\dots$
- $(\dots\dots\dots\dots) \times \dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Donc $P_B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$P_B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\boxed{P_B = \dots\dots \quad \dots\dots}$

Quel que soit le nombre n choisi, on a bien $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$.

④ Voici un programme de calcul :

Programme de calcul
- Choisir un nombre.
- Soustraire 7.
- Multiplier par 4.
- Ajouter 26.
- Soustraire le double du nombre de départ.

Yann dit : « Si on choisit un nombre entier au départ, le résultat final est toujours le double du nombre qui précède le nombre de départ.
A-t-il raison ?

Soit x le nombre choisi.

- x • $\dots\dots\dots\dots$ • $\dots\dots\dots\dots\dots \times \dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ • $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \underbrace{(\dots\dots \quad \dots\dots)}_{\textit{nombre qui précède}\dots\dots\dots}$

Yann a …………………… , on …………………… le double du nombre qui précède le nombre de départ.