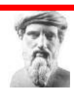
Leçon n°6 : Découvrir le théorème de Pythagore

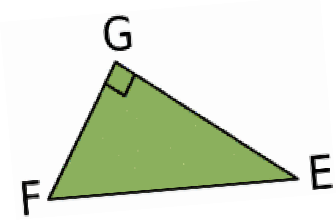


Vocabulaire

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit se nomme l'……………………………………… . C'est le plus ……………………… côté du triangle.

Exemple :

Le triangle EFG ci-contre est rectangle en G.
Son hypoténuse est […………].



Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'…………………………………… est égal à la ……………………… des carrés des longueurs des deux autres côtés.

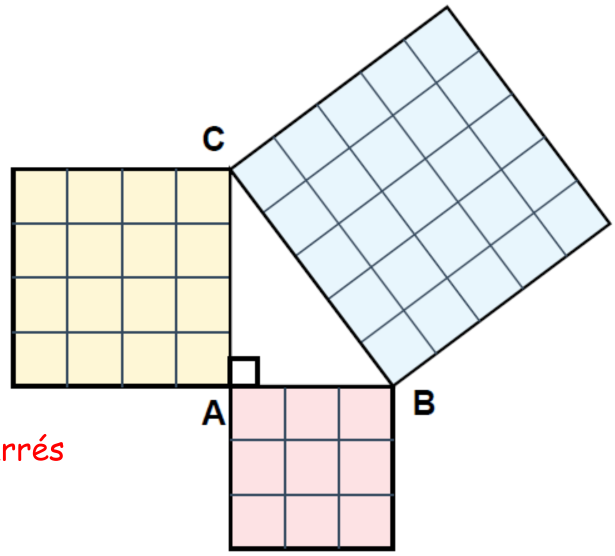
Exemple :

ABC est un triangle rectangle en A, donc

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Aire du grand carré

Somme des aires des deux petits carrés

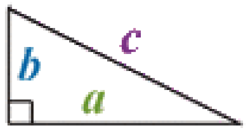


Pythagore serait né aux environs de 580 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée au sud-est de la ville d'Athènes. Sa mort est établie vers 495 av. J.-C. Pythagore n'a jamais découvert le théorème portant son nom puisqu'il était déjà connu par les chinois et les babyloniens 1000 ans avant lui. Il serait par contre le premier à l'avoir démontré.

DÉMONSTRATION

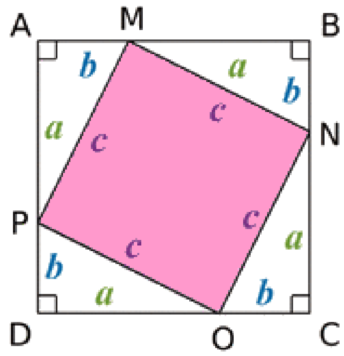
On dispose de :

- 4 triangles rectangles superposables dont les trois côtés ont pour longueur a, b et c.
- 1 carré de côté $(a + b)$ que l'on nommera ABCD.



Ecoute bien les explications données par tes camarades et ton professeur et remplis au fur et à mesure le texte à trou pour répondre aux questions.

① Première disposition

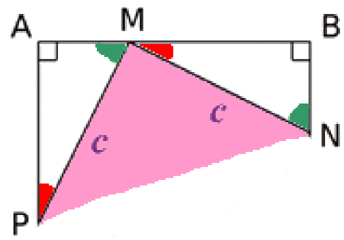


On répartit les quatre triangles rectangles à l'intérieur du carré ABCD de façon à obtenir un quadrilatère (en rose) de côté c.

Sur la figure ci-contre, les points A, M, B ; B ; N, C ; C, O, D et D, P, A sont alignés.

☐ 1. Démontre que l'angle $\widehat{PMN}$ est un angle droit.

Je sais que le triangle AMP est un triangle .... en ....



Or, si un triangle est rectangle, la somme des mesures de ses deux angles .... est égale à ....

Donc, $\widehat{AMP} + \widehat{APM} = \dots\dots\dots\ °$

De plus, les triangles AMP et MBN sont superposables (égaux),

Par conséquent, $\widehat{APM} = \dots\dots\dots\ °$.

Donc, $\widehat{AMP} + \widehat{BMN} = \dots\dots\dots °$

Par ailleurs, je sais que les points A, M et B sont ...., donc

$\widehat{AMP} + \widehat{PMN} + \widehat{NMB} = \dots\dots\dots °$

et $\widehat{PMN} = \dots\dots\dots° - (\widehat{AMP} + \widehat{NMB})$

d'où $\widehat{PMN} = \dots\dots\dots° - \dots\dots\dots° = \dots\dots\dots°$

Par conséquent, $\widehat{PMN}$ est un angle ....

☐ 2. Déduis-en la nature du quadrilatère MNOP ?

Je sais que le quadrilatère MNOP a .... côtés de même ....

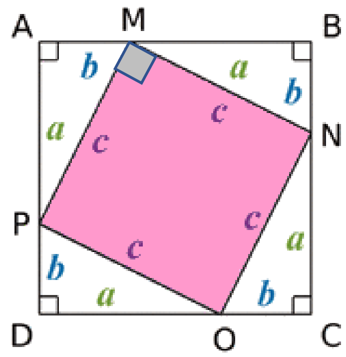
Or, si un quadrilatère a .... côtés de même ...., alors c'est un ....

Donc, MNOP est un ....

De plus, MNOP a un angle ……………………… .

Or, si un ……………………………… a un angle ………………………, alors c'est un ……………………………… .

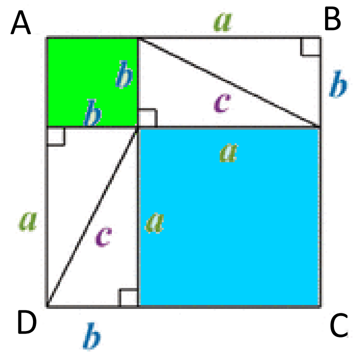
Donc, MNOP est un ………………………… .



☐ 3. Exprime l'aire de MNOP en fonction de c.

$$\mathcal{A}_{MNOP} = \mathcal{A}_{rose} = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

② Deuxième disposition



On redispose les 4 triangles rectangles à l'intérieur du carré ABCD de côté $(a+b)$ de façon à obtenir un carré (en bleu) de côté a et un carré (en vert) de côté b.

Exprime l'aire du carré bleu et du carré vert.

$\mathcal{A}_{bleu} = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$ et $\mathcal{A}_{vert} = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

③ Comparaison des deux dispositions

☐ 1. Justifie que l'aire du carré rose (MNOP) est égale à la somme des aires des carrés bleu et vert.

Disposition 1 : L'aire du carré ……………… est égale à l'aire du carré ………………… moins les aires des …………………… triangles …………………………… .

Disposition 2 : La somme des aires des carrés bleu et vert est égale à l'aire du carré ………………… moins les aires des …………………… triangles ……………………………

On a donc : $\mathcal{A}_{rose} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☐ 2. Ecris cette égalité en utilisant les longueurs a, b et c.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$