

Leçon n° 11 : Utiliser les nombres premiers

I - Reconnaître des nombres premiers

Définition

Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement
diviseurs : et



Exemple :

- ✚ 10 n'est pas un nombre premier : il admet 2 et 5 comme diviseurs en plus de 1 et 10.
- ✚ 7 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et par 7.

Remarques :

- ✓ 0 n'est pas un nombre premier car n'importe quel nombre non nul est un diviseur de 0.
- ✓ 1 n'est pas un nombre premier.
- ✓ 2 est le seul nombre premier pair car tous les autres nombres pairs sont divisibles par 2.
- ✓ Il existe une infinité de nombres premiers.

Il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100 qui sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ;
73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97.



Les plus anciennes traces des nombres premiers ont été trouvées près du lac Edouard au Zaïre sur un os (de plus de 20000 ans), l'**os d'Ishango**, recouvert d'entailles marquant les nombres premiers 11, 13, 17 et 19.

II - Décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers (DPFP)

Propriété (admise)

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.



Exemple ① : Décomposition de 300 en produit de facteurs premiers.



1^{ère} méthode On cherche ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

- 300 est divisible par 2 : $300 = 2 \times 150$
- 150 est divisible par 2 : $300 = 2 \times 2 \times 75$
- 75 est divisible par 3 : $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 25$
- 25 est divisible par 5 : $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

Or, 5 est un nombre premier, donc la décomposition de 300 en produit de facteurs premiers est terminée.

On écrit cette décomposition : $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$.

On a fini !

Autre rédaction

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

2^{ème} méthode

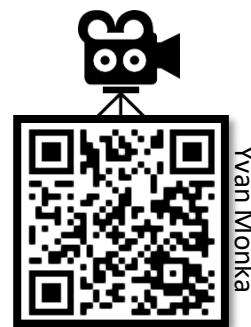
On écrit d'abord un produit quelconque égal à 300 (à l'instinct), puis on décompose les facteurs obtenus.

$$300 = 3 \times 10 \times 10$$

$$\text{Donc } 300 = 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$$

Les nombres 2, 3 et 5 sont premiers donc la décomposition de 300 en produit de facteurs premiers est terminée.

On écrit : $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$.



Exemple ② : Décomposer 1 014 en produit de facteurs premiers avec la calculatrice.



1 0 1 4 EXE

SECONDE

Décomp

1014

1014

2x3x13²

1014

2x3x13²

1014

réinit

1 0 1 4 2nde

décomp

simp

entrer

1014

1014

2x3x13²

III - Déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier à partir de sa DPFP

Méthode

La décomposition de 140 en produit de facteurs premiers est :

$$2^2 \times 5 \times 7 = 2 \times 2 \times 5 \times 7.$$

A partir de cette décomposition, on peut alors trouver tous les diviseurs de 140 en réalisant toutes les combinaisons de facteurs possibles :

① 2 ; 5 ; 7 ← On n'oublie pas le 1, puis on liste chacun des nombres premiers de la DPFP.

$2 \times 2 = 4$; $2 \times 5 = 10$;
 $2 \times 7 = 14$; $5 \times 7 = 35$;

On réalise toutes les combinaisons possibles et distinctes de 2 facteurs.

$2 \times 2 \times 5 = 20$;
 $2 \times 2 \times 7 = 28$;
 $2 \times 5 \times 7 = 70$;

On réalise toutes les combinaisons possibles et distinctes de 3 facteurs.

① $140 = 2^2 \times 5 \times 7.$

Les diviseurs de 140 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 20 ; 28 ; 35 ; 70 ; 140.

